

# 水滴大氣之旅中的力學

蔡沛勳\* 王安邦\* 隋中興\*\*

\*國立台灣大學應用力學研究所

\*\*國立台灣大學大氣科學系暨研究所

## 1. 水滴的誕生

不管是過去王夢麟〈雨中即景〉的「嘩啦啦啦啦下雨了，看見大家都在跑……」，或是近代陶喆〈找自己〉中的「嘩啦啦啦啦，天在下雨；嘩啦啦啦啦，雲在哭泣；嘩啦啦啦啦，滴入我的心」，這是流行音樂中大家耳熟能詳的歌詞，雨天迷濛神秘的雨滴，總是能吸引眾人的想像與滿懷的回憶，原因或許很單純，每個人只要靜靜地倚在窗前，就能夠欣賞到雨滴們的精彩表演，從滴答滴答的輕快節奏中揭開序幕，有時與片片葉子相互搭配，有時又與池塘水窪共同唱合，更不時的以驟雨滂沱來壯大聲勢，以演出各式精彩絕倫的不同序曲、間奏與主旋律場景，讓這齣擁有世界上最大演出舞台的交響樂，擄獲每個人心中永遠的共同回憶；而有時候，雨滴們也會隨興與隨後適時來探班的陽光合作，共同譜出天空上一道美麗的彩虹，或甚至還加上霓，作為〈天空之水〉樂章最後的謝幕之儀。雨滴迷人之處，不僅在於天賦異秉的表演身手，以及其平凡卻有容乃大，為世人帶來煥然一新的和諧潔淨與造物啟示，而更可貴的是他們的無可取代性，因為雨滴們的組成物質，是大自然所有生命的泉源——水。

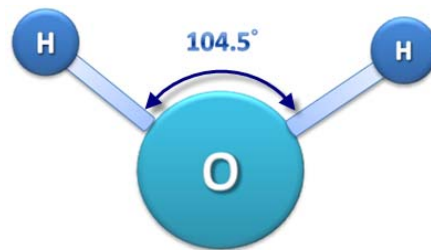


圖 1 在平衡狀態下水分子的結構圖。 O-H 共價鍵長度為  $0.96\text{\AA}$ ，兩共價鍵之夾角為  $104.5^\circ$

水分子的組成，是由一個氧原子和兩個氫原子以共價鍵的型式構成，化學式為  $\text{H}_2\text{O}$ ，如圖 1 所示。由於水的熱力特性，在地球大氣中水汽、液態水滴以及固態的冰三種相態可以同時存在，所以在雲中，我們可以發現水滴、冰晶和冰粒子等雲中粒子。而成雲過程中相位的改變會產生潛熱的釋放或吸收，造成雲對流過程進一步的發展。大氣中雲的形成主要是空氣受熱或地形的強迫作用，產生浮力上升，因膨脹冷卻，其中水分子透過凝結、凝華過程形成雨雲、冰雲(這些雲滴的大小典型為  $10\ \mu\text{m}$  左右)，再經由雲滴的碰撞長大成雨滴、雪、軟雹等降水

粒子 (典型雨滴直徑為 2 mm)。上述成雲降雨過程，可以圖 2 概括表示為暖雲降雨過程 (warm-rain process) 和冷雲降雨過程 (cold-rain process) 兩大類。相較於暖雲降雨過程，冷雲降雨過程複雜許多，也不是本文的重點，故圖中僅簡要顯示。詳細的雲物理過程在文獻[1]中有較完整的介紹。接下來本文將就暖雲中的碰撞過程有關力學的行為做系統性的介紹。總而言之，我們也可以簡單地想像：雲就好似水滴的嬰孩時期，當成長茁壯到成熟的階段，就形成較大的水滴，便有能力克服空氣的浮力而降落成雨，在到達地表上的花花世界之前，究竟在路途上還有多少的阻礙與考驗，等著這些帶有大自然萬物需求使命的水滴們呢？這便是在下一節將要敘述與力學相關的課題。

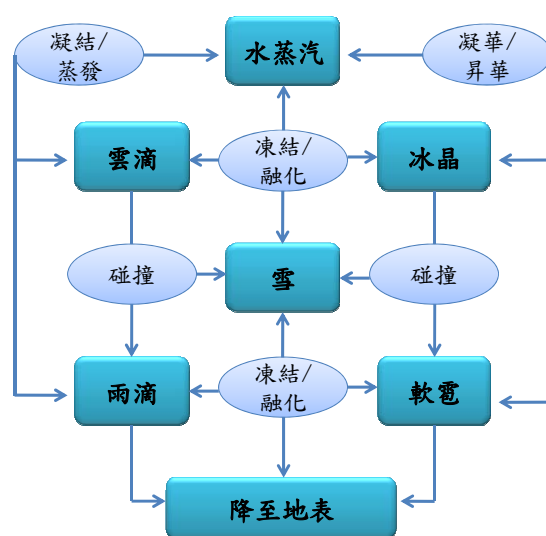


圖 2 降雨之可能路徑圖，左側為暖雲降雨(warm-rain)過程，右側為冷雲降雨(cold-rain)過程

## 2. 初生之「水」落凡塵

若不考慮大氣中的氣流、亂流等非穩定因素，並略去空氣的浮力，當水滴單純往地球下落的時候，主要會受到兩股力量的作用而影響其運動行為：一為重力，這是使水滴加速以到達地表的垂直吸引力；另一為空氣阻力，是使水滴減速，不想讓水滴太快往下落的阻抗力量。兩股力量彼此相互作用下，產生水滴周圍與內部流場的變化，而這些局部流場也反過來對下落水滴的成長與消散，扮演著重要的關鍵角色。以下僅就水滴在大氣之旅落凡塵的過程中，簡單地做一點相關的力學介紹。

## 2.1. 水滴所遭遇的阻力

當水滴於空氣中運動時，從相對運動的觀點，可視為空氣通過一固定的水滴來比擬。而探討此種現象，可透過流體力學的分析，來求得流場中的各特徵物理量，如流速、壓力、渦度(vorticity)、流阻大小等。一般在水滴不大的情形下，習慣性把水滴當作圓球體，基本上根據質量守恆定律(conservation of mass)，配合牛頓的運動方程式( $\sum F=ma$ ，其中 $\sum F$ 為所有外力之和， $m$ 為質量， $a$ 為加速度)，可推得式(2-1)之無因次的納維耶-斯托克斯(Navier-Stokes)方程式。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{2}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2-1)$$

其中， $\mathbf{u}$ 為無因次的流速， $P$ 代表氣壓， $Re$ 則表示雷諾數(定義為慣性力與黏滯力之比)。倘若流場處於雷諾數很小的條件下，意即慣性力非常小，相對於氣壓梯度和黏滯力皆小得多，在此時便可忽略式(2-1)等號左邊的非線性慣性項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ，而這樣子所求出的流場，便稱為斯托克斯(Stokes)流場，而若考慮球體為不會變形的剛性體，則所得球體在流體中運動所受之阻力，即稱作斯托克斯阻力( $D_s$ )；在這樣子假設下得出來的流場，具有高度的上下游對稱性，但若對於球體稍大或流速較高時即不適用，因為其表現不出真實具有渦漩發展的情況。歐申(Oseen)則是把非線性慣性項線性化， $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \sim (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ，以求出流場，在此 $\mathbf{v}$ 為給定的水滴流速。從圖3可以看到各種流場實驗值與計算值的差異，其中橫座標為雷諾數，縱座標為阻力( $D$ )與斯托克斯阻力( $D_s$ )的差異值。而為了配合一般直覺的觀察(若兩者無差別，則差異為零)，此圖縱座標以 $D/D_s - 1$ 來表示，如此一來，當 $D=D_s$ 時，縱座標值就會等於零；而從上述的敘述中，可以瞭解到斯托克斯的阻力是藉由忽略慣性力所求得之阻力量值，所以隨著雷諾數愈大(慣性力便漸漸具備足夠的份量來影響流場發展)，實際流場的阻力值與斯托克斯阻力值的差異就會愈來愈大。整體而言，從圖3可清楚看到斯托克斯阻力被低估( $D/D_s - 1$ 皆大於零)，以及歐申所求得阻力被高估的趨勢，所以真正的流場阻力值應該介於此兩者之間。基於此，曲線3為Le Clair等人直接以穩態納維耶-斯托克斯方程式，計算剛性球所受阻力之數值解，在雷諾數小於1000是相當符合實驗測量值的。然而，值得注意的是中空圓的資料點所代表的是實際水滴受阻力的實驗值，於雷諾數大於1000以後，便會與剛性球有明顯的差異存在。其原因在於水滴受阻力作用下，形體會往側向發生變形，此使得水滴形狀受阻力作用有變扁之勢，截面積變大則導致阻力明顯高出剛性球。而從這裡也可發現水滴具備隨周遭環境逆來順受的特質表現，在掉落途中雖受盡反向氣流的阻撓，儘管身形被迫擠壓變形，但仍然不畏困難與橫阻地繼續勇往直前，並利用其變大的截面積，減慢掉落速度以等待機會與其他水滴碰撞與合併(詳見2-5節)，以形成更大的水滴來產生更快的下落速度。由此來看，堪稱為一能屈能伸的表現，足供吾人遇逆境時的勵志借鏡參考。

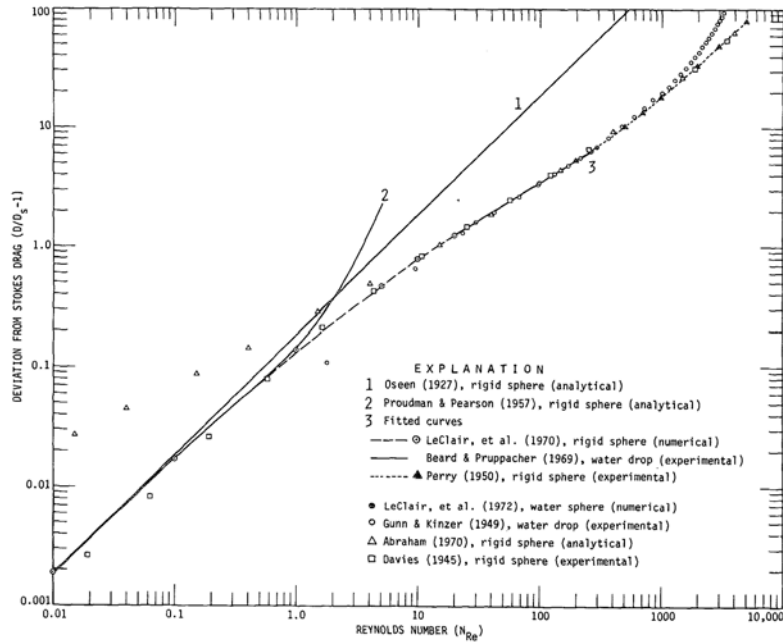


圖 3 不同雷諾數下，不同理論和實驗所對應阻力的比較圖[2]

## 2.2. 水滴內外的流場分布

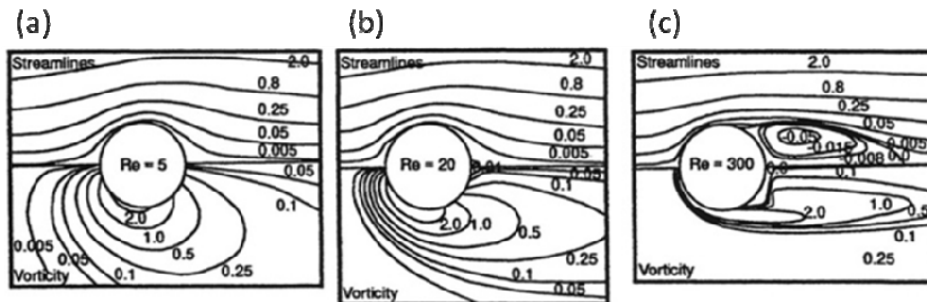


圖 4 通過一剛體圓球的流線函數與渦旋強度分布之數值計算結果[3] (a)  $Re = 5$  (b)  $Re = 20$  (c)  $Re = 300$

圖 4 為具黏滯效應、軸對稱、穩態以及不可壓縮流的假設下，利用納維耶-斯托克斯方程式計算流體通過一圓球的數值結果。流場由左向右，當雷諾數為 5 時，流場的速度還很小且呈現出高度的對稱性；而雷諾數等於 20 的計算結果，可以觀察到於圓球的尾流部分已發展出一佇立漩渦(standing vortex)，但整體流場仍舊維持著對稱性，又當雷諾數提升至 300 時，該佇立漩渦的尺寸大小已發展成超過圓球直徑；透過理論數值的運算，能夠使人更了解水滴周遭的局部流場細節，但由於數值的運算過程常會有諸多條件假設，例如此範例即是以穩態流場的方式來求解，當雷諾數過大時，在實際的情況下，會發生渦旋剝離的現象，如圖 5，那時便是一非穩態流場，將不再適用此假設條件下的計算結果，圖 5 為總計 95 顆水滴於垂直風洞中流場顯影之其中三種式樣，此實驗觀測的平均雷諾數為 1164，最大值與最小值分別為 1438、608，圖 5(a) 顯示於水滴之後發展生成的

渦漩有很好的對稱性，而圖 5(b) 的式樣出現較不對稱的情形，最後從圖 5(c) 的流場顯影可以觀察到更為複雜的渦漩發展情形。

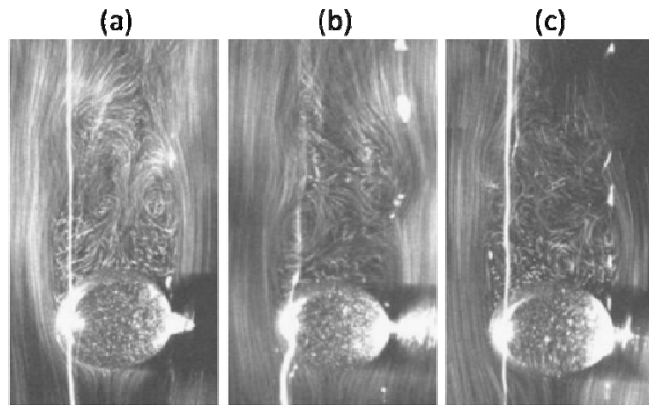


圖 5 懸浮於空氣中水滴的流場顯影實驗，總計 95 顆水滴試驗，平均雷諾數等於 1156，最大值为 1438，最小值为 604 [4]。於水滴背後依雷諾數從小至大而發展出 (a) 對稱的渦漩對 (b) 不對稱的渦漩對 (c) 複雜無規律的流場。

另外，由於水滴本身也是流體，當水滴落下時，其與外部空氣的交互作用，會有內流場的產生。圖 6 上半邊所示為於一風洞內所作的觀察結果，很顯然的，於  $Re=140$  時，水滴外部環流已影響至內流場的發展，導致水滴後方內流場也出現一小渦漩，但這現象於下半部的斯托克斯流場是無法計算得到的。由此可再次呼應前段所述：在雷諾數較大的情況下，斯托克斯流場並不符合實際狀況的。同樣的，圖 7 為圓球水滴周圍的流場以及內部渦漩的數值解，在  $Re=30$  和  $300$  的情況下，流場並不具有前後對稱性，且外部環流確實連帶引發內流場渦漩的發展，這樣的數值結果與在風洞實驗中得到的結論一致；文獻中有諸多的實驗與數值計算結果，證明水滴的內流場確實存在[5-7]，但因水滴尺寸、空間分佈密度小，而空氣黏滯性相對水滴太小，故其對外部流場的影響也相對不大。不過水滴的內流場，對於大氣化學過程或是工業上流體混合的反應率研究上，卻有重要的地位，例如工業革命後的世界，製造、生產、加工業等的工廠紛紛林立，而所跟著排放出來的二氧化硫( $SO_2$ )及氮氧化物等酸性氣體，將會造成酸雨危機，這時雲滴、水滴之內流場所帶動的傳輸效果與流體間混合的行為機制便值得更深入的研究與瞭解了。

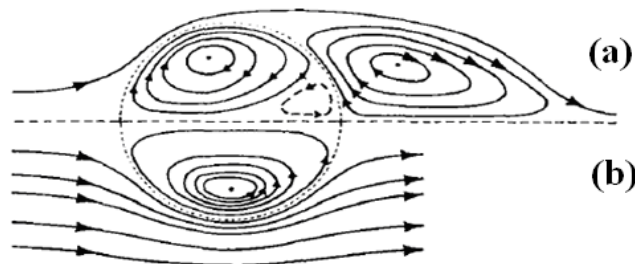


圖 6 水滴於雷諾數 140 的空氣中之內外流場分布 (a)觀察結果 (b)斯托克斯流場[7]

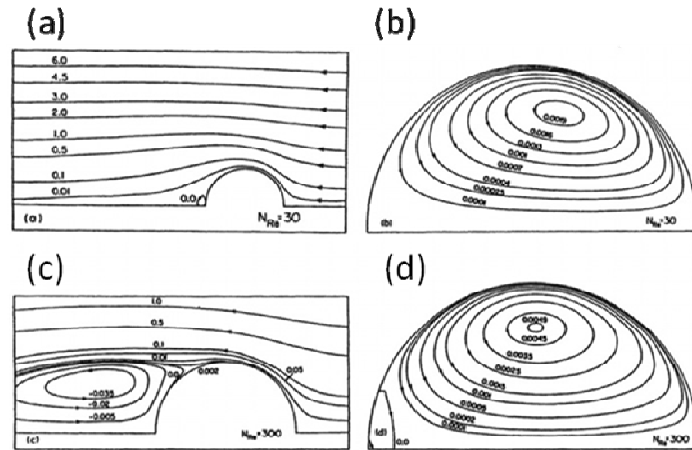


圖 7 不同雷諾數之氣流通過一水滴之內外流場比較，(a),(b)雷諾數=30，(c),(d)雷諾數=300[6]

### 2.3. 水滴的終端速度

水滴在大氣的旅程中，受重力作用而向下加速時，一般而言，空氣阻力與速度是成正比平方關係，意即速度愈大所受之阻力也是愈大的；而從力平衡的分析中可以得知，空氣阻力愈大，水滴所受向下的加速度則會減少，而當空氣阻力大到足以與重力相抗衡之時，則水滴會逐漸失去他的加速度，最後呈現一等速度向下的運動行為，而這一等速度則稱作為水滴之終端速度。圖 8 說明水滴的終端速度為液滴尺寸的函數，其並且也受到不同氣壓及溫度的影響，故水滴大小與環境條件不同，則會有不相同的終端速度值。若以台灣地區平地而言，雨滴所能達到的終端速度較接近圖 8 中最底層之曲線，可以看出下雨時大雨滴(直徑約 4mm 以上)的終端速度大約落在 9 m/s 左右。所以相信雨滴雖小，但雨滴以這樣快的速度(近乎成人選手衝刺百米短跑的速度)連續落在身上，打起來應該還是會蠻有感覺的，而且很可能輕易的讓人被噴濺成落湯雞的。

水滴憑著初生之犢不畏虎，不知天高地厚的自天一躍而下，將高度化成速度，本以為一切可以一帆風順，一路加速暢快飆行到人間，而卻未料到在「人間事不如意者，十常八九」，在恆常的阻力逆境作用下，只好以所謂的終端速度妥協入境，至此以後的路途，眾水滴們豈皆就只能以這速度繼續完成這漫長的大氣天空之旅呢？那這人間凡塵豈不太無趣了？欲知水滴將會有何崎嶇轉折，且看本文下兩節分曉。

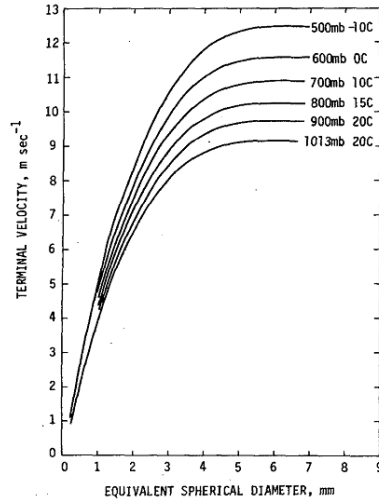


圖 8 不同氣壓及溫度條件下的水滴尺寸與終端速度關係圖[2]

## 2.4. 水滴落下時的形狀

在上一節，我們以圓球來模擬水滴形狀，但一般人從生活或一般圖書漫畫的直覺印象中，雨滴的形狀應該就跟人滴落下的眼淚、汗水或水龍頭滴下的液滴瞬間印象一樣，是上尖下圓的。或者如燈謎中的"千條線、萬條線，落到水中都不見"帶著有點意境與想像的影像，但這都是由於人類視覺暫留的關係，使高速落下的雨滴影像就有如千絲萬縷般的相連，無法端詳其細節，而造成此錯覺的意象。科學研究上，若以高速攝影的方式凍結捕捉雨滴的瞬時身影，即可發現在終端速度下，雨滴的形狀並非直線狀，也非眼淚一般，真正呈現的是略帶點扁平下緣，而好似美式漢堡麵包一般的形狀。圖 9 所示為水滴於終端速度條件落下時，不同水滴大小所展現出來的形狀，在 2-2 節的內容中，我們已知水滴落下時會受空氣流場的作用，而這作用力即是使雨滴身形略微變扁的主要因素，圖 10 中可以更清楚地從數值模擬中得到在終端速度下，雨滴底緣受氣流壓迫的情形，當雨滴粒徑較小時，其形狀不易受氣流壓迫而變形，故仍維持著正圓球形，而當粒徑漸大時，變形的趨勢則更加明顯。

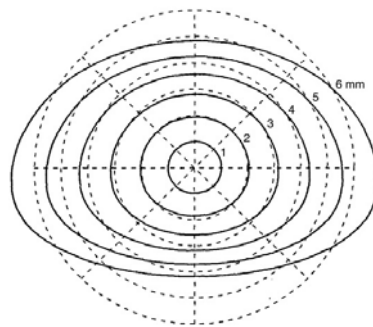


圖 9 水滴於終端速度落下時的數值計算結果剖面圖(1 atm, 20°C)[8]

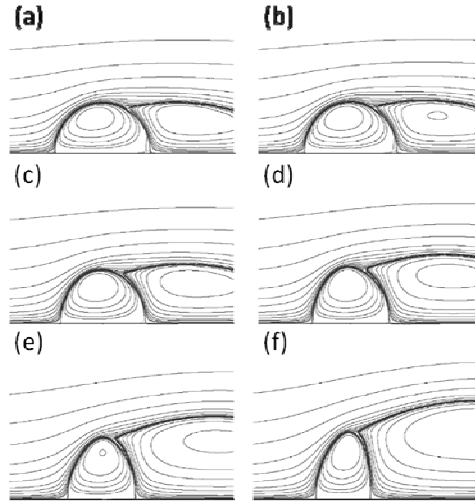


圖 10 水滴於終端速度下的形狀變化及流線函數圖，雷諾數為 200，韋伯數( $We = \rho v^2 d / \sigma$ ,  $\rho$ 、 $v$ 、 $d$  和  $\sigma$  分別為水滴之密度、速度、粒徑以及表面張力) 於圖中分別為(a)=1, (b)=2, (c)=5, (d)=8, (e)=12, (f)=15 [9]

另外，雨滴大小與形狀的關係，還牽涉著一個十分重要的大氣研究課題—降雨量。降雨量的多寡直接影響地表上自然萬物的生活型態，對土地而言，可依此畫分成森林、草原、沙漠等型態。對人類而言，足夠的降雨，更是維持民生所需以及文明發展的基礎，而過多的雨量，則可能對自然環境、萬物生命造成無法防範的傷害，所以如何精確地預測降雨量，是近百年來眾多科學家們一直關心的主題與研究。圖 11 所示為雨滴的形狀參數(雨滴的最大縱向長度除以雨滴的最大橫向長度)，代表在終端速度下的雨滴形狀。形狀參數愈小，表示雨滴愈趨扁形，由此也可再次觀察到當雨滴愈大時，確會形成較扁的雨滴形狀。而由雙偏極化雷達的水平與垂直回波訊號中，可以測得雨滴在一降雨地區的粒徑分布譜，藉此回推預測該地的降雨型態及降雨率。例如若以降雨型態來看，冷鋒型態會擁有較小雨滴，相對應的降雨率也較小，而梅雨鋒面的雨滴粒徑較大且分布較廣，至於颱風季節的雨滴為中大尺寸但分布較為集中。

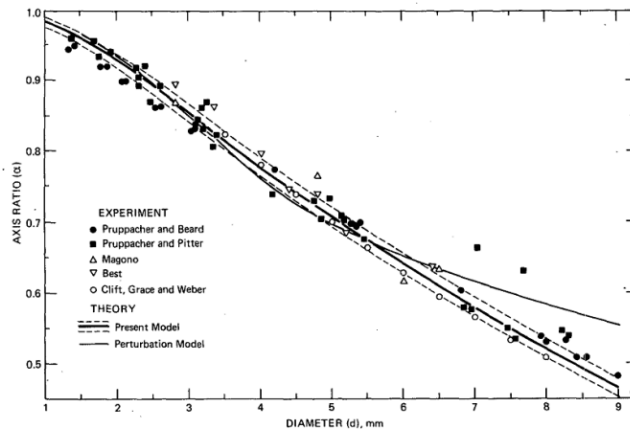


圖 11 水滴形狀參數(b/a)隨水滴粒徑之變化[8]



## 2.5. 水滴的碰撞與合併

在 2-1 水滴誕生一節中提及降雨有兩種機制，一為冷雲降雨過程，一為暖雲降雨過程。從物理的角度可知當離地表面愈高時，溫度愈低的自然現象。而冷雲表示溫度低於攝氏零度之雲層，存在於其中的多數為固態水分子結構，如冰晶。當其成長至能擺脫空氣浮力的束縛時，則會脫離雲底進入高於攝氏零度的大氣中，而後這些體積較大的冰粒子，因吸收充足的熱量而融解形成液態水滴，最後降落至地表成為雨水。而暖雲降雨過程中，小水滴之間容易因碰撞而結合，進而形成大水滴，並以其重力克服空氣浮力造就降雨現象。而水滴在掉落的過程中，從圖 8 中可以看出小水滴的速度小，大水滴的速度快。所以，這就產生了不是先落下的水滴就會先落到地表，有時會因速度較大的大水滴追撞速度較小的水滴，有時會因空氣擾動而造成水滴之間彼此互相碰撞，此一碰撞過程或使小水滴結合發展成大水滴，或使其破裂成更多的小水滴，這一消一長的循環事件一直不斷地於水滴掉落途中上演著。這便說明出以實際的降雨情況來說，雖然我們習慣上為方便起見，假設所有水滴皆以終端速度落下，但事實上水滴掉落期間，夾雜著這一反覆互相撞擊的過程，使得並非全部水滴皆必須以其終端速度落下。這種大自然『序中有亂』的多元性發展，造成水滴在大氣之旅的力學更多采多姿的發展。而雨滴之間的碰撞，一般大致上將其分成三大類：撞擊後不合併且彈開，撞擊後合併以及撞擊後合併再破裂，分別如以下圖 12、圖 13、圖 14 所示。

圖 12 是撞擊後彈開的實驗照相圖，其中兩撞擊水滴的大小比( $p$ )為 0.21，而兩水滴會彈開的原因是透過反彈機制(rebound mechanism)所產生的，也就是說水滴彼此在碰撞期間，於其間存在一層空氣薄膜，使得兩水滴並沒有真正接觸黏合，而最終藉由表面張力的回復力道而將兩水滴反彈開來。

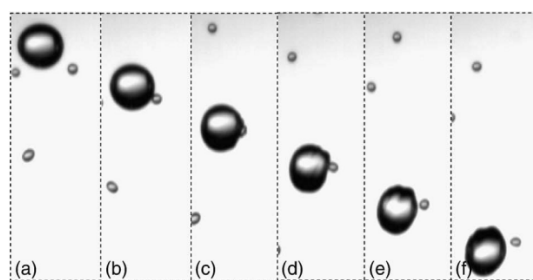


圖 12 兩水滴碰撞後不合併且透過反彈機制(Rebound mechanism)彈開的情形，( $d_1=5.3\text{mm}$ ,  $d_2=1.1\text{mm}$ ,  $V_1=2.39\text{m/s}$ ,  $V_2=1.76\text{m/s}$ ,  $p(\text{drop size ratio}, d_2/d_1)=0.21$ )[10]

圖 13 亦為撞擊後不合併且彈開的實驗結果，然而不同的是其所分開的原因和上述反彈機制不一樣，透過幾近相反的切線速度，使其碰撞後隨即因切線速度的帶動而不互相合併且彈開，這現象即稱為擦撞機制(grazing mechanism)。

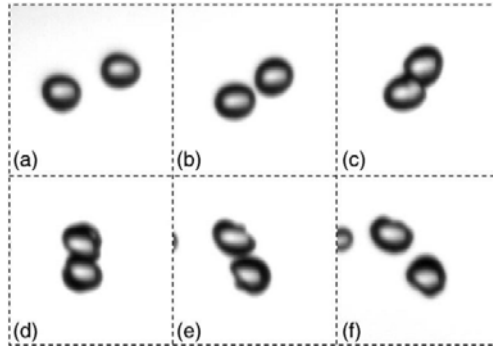


圖 13 兩水滴碰撞後不合併且透過擦撞機制(grazing mechanism)彈開的情形( $d_1=2.9\text{mm}$ ,  $d_2=2.8\text{mm}$ ,  $V_1=2.44\text{m/s}$ ,  $V_2=2.52\text{m/s}$ ,  $p=0.97$ )[10]

圖 14 顯示為雙液滴碰撞後合併的結果。此通常由於彼此接近的雙液滴，因為相互吸引的凡得瓦爾力夠大之時，進而導致融合的一個現象來做解釋[1, 10]。而從合併後的實驗觀察得知，此合併的液滴在一開始會有表面波明顯的振盪行為產生，其後透過毛細波(capillary wave)的來回振盪行為，在黏滯力的作用下，振盪的振幅會逐漸衰減，最後，終至回歸到一穩態情況下。

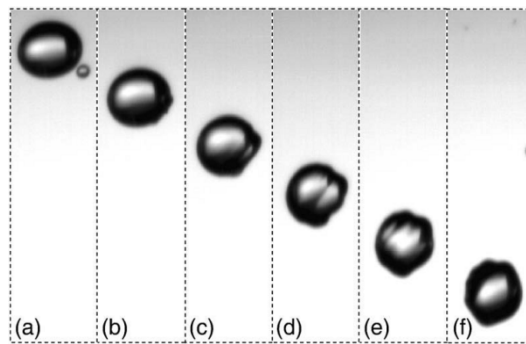


圖 14 兩水滴碰撞後彼此合併的情形，其中  $d_1=6.1\text{mm}$ ,  $d_2=1.1\text{mm}$ ,  $V_1=2.4\text{m/s}$ ,  $V_2=1.88\text{m/s}$  ( $p=0.18$ )[10]

至於水滴的破裂，主要又可再細分非自發性與自發性兩種情形。因碰撞而導致破裂者稱之非自發性，若以較高速且偏正向的條件下彼此碰撞，容易有分裂的現象產生，主要的型態如圖 15 所示[10, 11]。

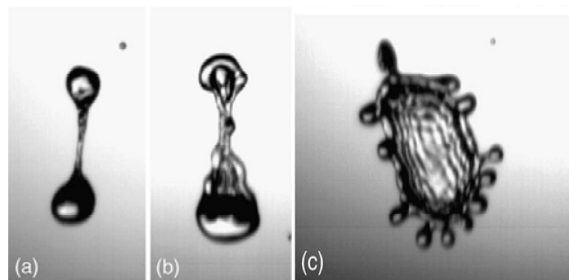


圖 15 三種雙液滴撞擊後所產生的破裂式樣 (a)頸縮狀 (b)片狀 (c)碟狀[10]

另一破裂原因，是水滴的自發性破裂，在大氣中存在著各式各樣不穩定的紊流，此將引致造成水滴的振盪與不穩定。一般來說，在靜止的大氣中，雨滴可大到 9 mm 的直徑，超過此數值則會產生自發性的破裂。自發性破裂的主要機制又分為兩種：啞鈴式破裂 (dumbbell breakup) 以及袋式破裂 (bag breakup)。前一種是因水滴底部受氣壓擠壓程度過大，而直接分裂成兩個水滴，因外型酷似啞鈴而得名，後一種也同樣受巨大的氣壓所壓迫，但並不直接破裂，而是整個水滴被吹脹起來好似一個提袋，如圖 16，故以此為名。

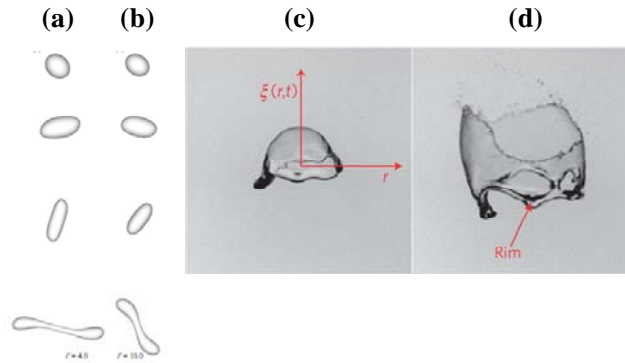


圖 16 單顆液滴自發性破裂-(a)(b)啞鈴式[12] (c)(d)袋式破裂[13]

水滴的碰撞實驗，不僅對研究雲物理中雨滴成核的機制有相當重要的意義，在工業界上，也擴及燃燒噴霧化工單元操作、廢棄處理等系統的應用，生醫檢測系統中的微液滴操控技術，以及在實驗室晶片中如何適當的使微液滴結合、混合，皆可從碰撞理論和實驗中得到很好的線索與啟發。甚至到最近熱門的核能話題，也與此有所關連性存在，由於觀察液滴碰撞遠比觀察原子容易得多，而原子核在碰撞過程中也會有合併、彈開亦或破裂的情形發生，所以通常將此類的原子核碰撞模式謂之為液滴模式(liquid drop model)[14]。例如：可以將鈾 235 原子核比擬為一顆小水滴，若受外來的中子撞擊時，中子會先穿透原子核與之合併，接著引致原子核呈不穩定狀態，最後，原子核便像水滴碰撞的反應過程一樣分裂開來，也就是所謂的核分裂(Nuclear fission)。水滴的旅程至此，還尚未進入所謂花花世界的地球表面，但其走過所留下的足跡，卻已對地球上所需要的相關人文與科技展現了這麼多的影響與關連，豈不令人驚嘆？

## 2.6. 水滴的振盪

當水滴於一穩態流場中落下時，處於一個力平衡狀態，水滴形狀也就不會隨時間變化，如 2-4 節談論終端速度時，水滴落下呈現的外形，即是此種情形；相反地，若對非穩態流場中運動的水滴而言，其形狀就會隨著時間產生變化。水滴在大氣中降落而未達終端速度以前，從圖 17 的模擬計算結果可以觀察到水滴具有明顯的振盪行為。但究竟此液滴振盪的頻率為何？又是什麼因素造成液滴的振盪？將是本節的兩個主要提問。

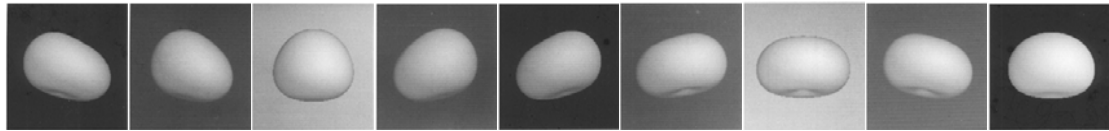


圖 17 直徑 5mm 的雨滴振盪模擬計算時序圖，依序由左至右為一系列隨時間的振盪結果，而最後一張圖描述的是穩態(steady state)時的液滴形狀；其中白色背景之圖為純軸對稱的振盪模態，黑色背景者則為純橫向振盪模態，灰色背景者是混合型的一振盪之情形[15]

Rayleigh(1879)[16]，利用尤拉(Euler)方程式和拉普拉斯(Laplace)方程式推導出來的公式(2- 2) ，可以求出液滴在各振盪模態下的振盪頻率。

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R^3}} \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots \quad (2- 2)$$

上式中， $\sigma$ 、 $\rho$ 、 $R$  分別為液體表面張力、液體密度以及液滴半徑。針對液滴振盪隨時間的外形變化，Basaran(1992)[17, 18]利用勒讓德多項式(Legendre polynomial)來描繪，如式(2- 3)所示。而透過此方程式，可以在極座標中勾勒出液滴隨時間振盪時的外形輪廓(如圖 18)，同時也可以計算出不同模態的振盪行為。

$$f(\theta, t) = 1 + \sum_{n=2}^4 C_n(t) P_n(\cos\theta) \quad (2- 3)$$

其中  $P_n$  即為勒讓德多項式，而  $C_n$  為各振盪模態的振幅。

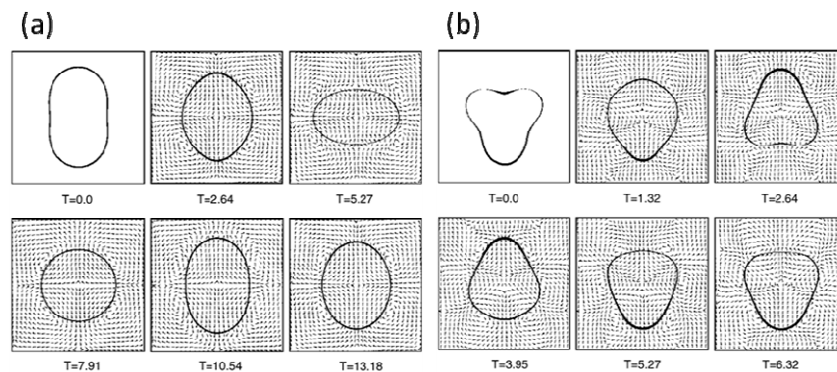


圖 18 液滴於各模態之振盪情形：(a)第二振盪模態(n=2) (b)第三振盪模態(n=3)

Gunn (1949)[19]在文獻中第一次提及造成液滴振盪的原因。他觀察到一半徑為 500  $\mu\text{m}$  的液滴於終端速度下運動的情形( $Re \approx 300$ )，其自然振盪頻率剛好吻合於流體通過一剛性體圓球後方的渦旋剝離頻率之計算結果，於是得到一結論，液滴具有週期性振盪的運動行為乃是透過液滴後方的渦旋剝離而激發產生的。圖 19 為液滴尺寸、渦旋剝離頻率與振盪模態的關係圖。從圖 19 帶來的資訊顯示，液滴粒徑落於  $1.0 \leq d \leq 1.3 \text{ mm}$  的範圍內時，渦旋剝離的頻率會與振盪理論中的

第二基本振動模態( $n=2$ , fundamental oscillation mode)產生共振效應；而對於  $1.4 \leq d \leq 1.6$  mm 之範圍者，渦旋剝離頻率與在第三和第四振動模態的振盪頻存在共振效應。但是從圖中不難發現：對於更大尺寸的液滴而言，剝離頻率與液滴的振盪頻率是不符合的，因此很難以此相同的機制說明所有振盪的緣由。而後 Beard[20] 提出在兩者頻率不符合時，液滴振盪的激發機制有兩種方式：(1) 當渦旋剝離頻率等於第二或第三振動頻率的整數倍時，則可發生次諧波的共振 (subharmonic resonance)。(2) 當一液滴進行振動運動時，形狀的改變會引致頻率的回授機制 (frequency feedback)，使剝離頻率與液滴振盪頻率的相位一樣。然而，在真實的情況，還存在著第三種激發液滴振盪的原因，意即前章節談論到的碰撞過程，液滴間彼此的碰撞行為將導致較大振幅的振盪運動，由於碰撞過程使液滴獲得額外的動能，引致液滴表面呈現不穩定的狀態，而液滴的表面張力欲使其回復到原本的平衡狀態而有所謂的振動行為產生，同時，藉由黏滯力消耗能量將使得振盪振幅隨時間愈趨平緩，最後，液滴得以回復到穩態時的特徵形狀。

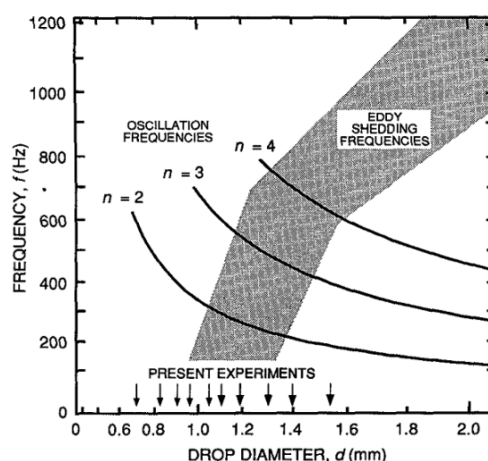


圖 19 水滴於大氣中落下時的振盪行為與水滴大小和渦旋剝離頻率存在一個對應關係，曲線為水滴於空氣中不同的振動模態頻率，灰色區域為渦旋剝離的頻率分布[20]

值得注意的是：於工程應用的領域中，由於液滴的生成多為利用流體因表面張力與重力之間的不平衡，導致拉扯斷裂後的產物。而拉扯帶來的作用力驅使液滴產生來回週期性的振盪行為。這也就是說，若拉扯斷裂的方向平行於重力方向的話，則液滴只會產生軸對稱的振動模態，如圖 18 所示；近年來，由於液滴與其周遭介質之交互作用的關係廣受各學者注意，而使得液滴振盪帶來的影響效益始受人注目[21-24]，圖 20 為各不同模態間週遭流場的渦旋發展情形，可以看見渦旋生成的數量剛好與振盪的模態相同，比如在第二振動模態下，即發展出兩對渦旋，而第三振動模態下，則有三對渦旋發展，以此類推。藉由因振盪所生成的渦旋研究，可以瞭解到液滴於各種環境下與接觸介質的交互作用情形是相當複雜但都有其物理意義的。故爾後，於所探討之液滴研究課題上，不應只單一考慮液滴的質心運動能量所造成的影響，而需以更嚴謹的角度思考液滴力學振盪所致的各種表現，以含括有一更全面且更適切的物理詮釋。

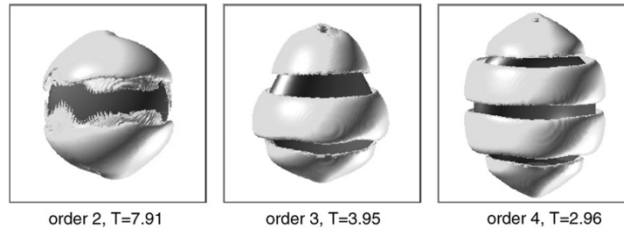


圖 20 三維度之渦漩(Vortex)結構[18]

### 3. 返璞自然

想當初水滴起源於地表之河、池、湖以及海面，於大氣中成長，再下降回地表，途中環境"風水"不斷改變，也塑造他們具備高度適應環境的特性。從大氣領域看來，水滴的演變，造成天氣的改變，瞭解其過程有助於幫助降水的量測、劇烈天氣的預報、雲雨伴隨氣候變遷的影響等。而就工程領域而言，水滴是最為經濟實惠的工作物質，常以其簡單的物理化學特性，創造日新月異、推陳出新的科技發展。就民生發展來講，水滴形成的水資源，為地球上最珍貴而不容許缺少的基本物質之一，也是地球孕育生命的泉源。而在水滴們完成這些偉大使命貢獻之後，他們選擇離開的方式，是默默地重新回到他們最熟悉的氣態分子，以蒸發、昇華的過程重新回到大氣中，再倚賴著空氣浮力像大自然大部分物質落葉歸根的方式，回到當初他們誕生的地方，而這就是水滴獨特的生活方式：不斷地以此循環作用，讓大自然乃至整個地球能夠維持著那永恆的健康與美麗，此一循環過程(圖 21)，便稱作是一水循環。

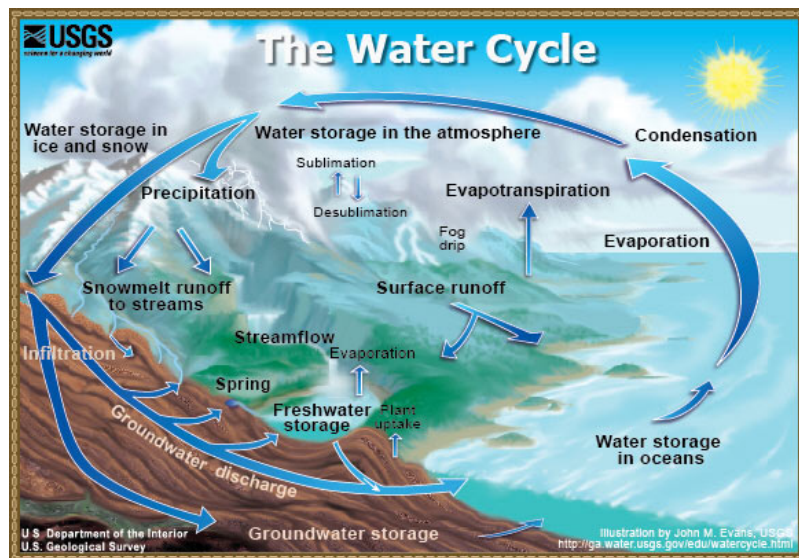


圖 21 水循環示意圖 (from USGS)[25]

#### 4. 参考文献

- [1] Pruppacher, H. R., and Klett, J. D., 1978, *Microphysics of Clouds and Precipitation*, D. Reidel Publishing Co.
- [2] Beard, K. V., 1976, "Terminal Velocity and Shape of Cloud and Precipitation Drops Aloft," *J. Atmos. Sci.*, 33(5), pp. 851-864.
- [3] Lin, C. L., and Lee, S. C., 1973, "Transient state analysis of separated flow around a sphere" *Comput. Fluids*, 1(3), pp. 235-250
- [4] Saylor, J. R., and Jones, B. K., 2005, "The existence of vortices in the wakes of simulated raindrops," *Phys. Fluids*, 17(3), p. 4.
- [5] Szakall, M., Diehl, K., Mitra, S. K., and Borrmann, S., 2009, "A Wind Tunnel Study on the Shape, Oscillation, and Internal Circulation of Large Raindrops with Sizes between 2.5 and 7.5 mm," *J. Atmos. Sci.*, 66(3), pp. 755-765.
- [6] Leclair, B. P., Hall, W. D., Hamielec, A. E., and Pruppacher, H. R., 1972, "Theoretical and Experimental Study of Internal Circulation in Water Drops Falling at Terminal Velocity in Air," *J. Atmos. Sci.*, 29(4), pp. 728-&.
- [7] Pruppacher, H. R., and Beard, K. V., 1970, "A Wind Tunnel Investigation of Internal Circulation and Shape of Water Drops Falling at Terminal Velocity in Air," *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 96(408), pp. 247-&.
- [8] Beard, K. V., and Chuang, C., 1987, "A New Model for the Equilibrium Shape of Raindrops," *J. Atmos. Sci.*, 44(11), pp. 1509-1524.
- [9] Feng, J. Q., 2010, "A deformable liquid drop falling through a quiescent gas at terminal velocity," *J. Fluid Mech.*, 658, pp. 438-462.
- [10] Testik, F. Y., 2009, "Outcome regimes of binary raindrop collisions," *Atmos. Res.*, 94(3), pp. 389-399.
- [11] McTaggart-Cowan, J. D., and List, R., 1975, "Collision and Breakup of Water Drops at Terminal Velocity," *J. Atmos. Sci.*, 32(7), pp. 1401-1411.
- [12] Li, X. Y., and Sarkar, K., 2006, "Drop deformation and breakup in a vortex at finite inertia," *J. Fluid Mech.*, 564, pp. 1-23.
- [13] Villermaux, E., and Bossa, B., 2009, "Single-drop fragmentation determines size distribution of raindrops," *Nature Physics*, 5(9), pp. 697-702.
- [14] Bohr, N., and Wheeler, J. A., 1939, "The mechanism of nuclear fission," *Phys. Rev.*, 56(5), pp. 426-450.
- [15] Beard, K. V., Bringi, V. N., and Thurai, M., 2010, "A new understanding of raindrop shape," *Atmos. Res.*, 97(4), pp. 396-415.
- [16] Rayleigh, L., "On the capillary phenomena of jet," *Proc. Proceedings of the Royal Society of London*, pp. 71-97.

- [17] Basaran, O. A., 1992, "Nonlinear oscillations of Viscous-Liquid Drops," *J. Fluid Mech.*, 241, pp. 169-198.
- [18] Watanabe, T., 2008, "Numerical simulation of oscillations and rotations of a free liquid droplet using the level set method," *Comput. Fluids*, 37(2), pp. 91-98.
- [19] Gunn, R., and Kinzer, G. D., 1949, "The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air," *Journal of Meteorology*, 6(4), pp. 243-248.
- [20] Beard, K. V., and Kubesh, R. J., 1991, "Laboratory Measurements of Small Raindrop Distortion .2. Oscillation Frequencies and Modes," *J. Atmos. Sci.*, 48(20), pp. 2245-2264.
- [21] Pumphrey, H. C., and Elmore, P. A., 1990, "The Entrainment of Bubbles by Drop Impacts," *J. Fluid Mech.*, 220, pp. 539-567.
- [22] Hung, W. T., Kuan, C. C., and Wang, A. B., "Visualization of Bubble Induced by A Free Falling Drop," *Proc. The 9th Asian Symposium on Visualization*.
- [23] Kuan, C. C., Tsai, P. H., and Wang, A. B., "Evolution of V-d Diagram with Oscillation Effect for Large Bubble Formation," *Proc. The 34th National Conference on Theoretical and Applied Mechanics*.
- [24] Durst, F., 1996, "Penetration length and diameter development of vortex rings generated by impacting water drops," *Exp. Fluids*, 21(2), pp. 110-117.
- [25] Evans, J. M., "The Water Cycle," <http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycle.html>.